11.2. Věta. *Nechť V a W jsou vektorové prostory dimenzí m a n nad tělesem T a M, N báze těchto prostorů. Nechť f je homomorfismus prostoru V do prostoru W a A matice typu $n \times m$ nad tělesem T. Matice A je maticí homomorfismu f vzhledem k bázím M, N právě tehdy, když pro každý vektor $v \in V$ je*

$$\langle f(v)\rangle_N^{\mathrm{T}} = A \cdot \langle v\rangle_M^{\mathrm{T}} \,. \tag{1}$$

Důkaz. Pišme $M = \{v_1, \dots, v_m\}$, $N = \{w_1, \dots, w_n\}$ a $A = (a_{ij})$. Předpokládejme nejprve, že A je matice homomorfismu f vzhledem k bázím M, N. Pro každé $j = 1, \dots, m$ je tedy

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \,.$$

Nechť v je libovolný vektor prostoru V; vyjádřeme jej souřadnicemi vzhledem k bázi M:

$$\langle v\rangle_M = (b_1, \dots, b_m)\,, \quad \text{tj.} \quad v = \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \,.$$

Odtud

$$f(v) = \sum_{j=1}^{m} b_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j\Big) \cdot w_i \,,$$

tj.

$$\langle f(v)\rangle_N = \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{1j} b_j, \dots, \sum_{j=1}^{m} a_{nj} b_j\Big) \,.$$

Dokázali jsme tedy, že součin matice A s maticí $\langle v\rangle_M^{\mathrm{T}}$ je roven matici $\langle f(v)\rangle_N^{\mathrm{T}}$; rovnost (1) tedy platí.

Předpokládejme naopak, že pro každý vektor $v \in V$ platí rovnost (1). Jestliže je B matice homomorfismu f vzhledem k bázím M, N, potom (podle právě dokázané implikace) je pro každý vektor $v \in V$

$$\langle f(v)\rangle_N^{\mathrm{T}} = B \cdot \langle v\rangle_M^{\mathrm{T}} \,. \tag{2}$$

Porovnáním rovností (1) a (2) vidíme, že pro každý vektor $v \in V$ je

$$A \cdot \langle v\rangle_M^{\mathrm{T}} = B \cdot \langle v\rangle_M^{\mathrm{T}} \,.$$

Po dosazení vektoru v_1 (první vektor báze M) tato rovnost přejde v rovnost prvních sloupců matic A a B. Postupným dosazením vektorů $v_1, \dots, v_m$ tak dojdeme k rovnosti matic A a B. Matice A je tedy maticí homomorfismu f vzhledem k bázím M, N. $\square$

11.3. Příklady.

(i) Homomorfismus f prostoru $\mathbb{R}^3$ do prostoru $\mathbb{R}^4$ zobrazuje vektor (x, y, z) na vektor $(x+y, y+z, x+z, x)$. Najdeme matici tohoto homomorfismu vzhledem ke kanonickým bázím prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$.

Vektory $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ se homomorfismem f zobrazí po řadě na vektory $(1,0,1,1), (1,1,0,0), (0,1,1,0)$; souřadnice těchto vektorů vzhledem ke kanonické bázi jsou tytéž čtveřice. Maticí homomorfismu f vzhledem ke kanonickým bázím je tedy matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Rovnost (1) z věty 11.2 má v tomto konkrétním případě tvar

$$\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ,$$

tj. odpovídá předpisu, kterým je homomorfismus f definován.

Najděme nyní matici homomorfismu f vzhledem k bázím

$M = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,-1,0)\}$,

$N = \{(1,1,0,1), (1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,1,1,1)\}$.

Vektory báze M se při f zobrazí na vektory $(2,1,1,1), (1,1,2,1), (-1,-1,0,0)$. Tyto vektory musíme vyjádřit souřadnicemi vzhledem k bázi N; někdy je možno příslušné souřadnice uhodnout, jindy je třeba je vypočítat, např. pomocí soustavy lineárních rovnic. V našem případě je

$$\begin{aligned} (2,1,1,1) &= 2 \cdot (1,0,0,0) + (0,1,1,1)\,, \\ (1,1,2,1) &= -(1,1,0,1) + 2 \cdot (1,0,0,0) + 2 \cdot (0,1,1,1)\}\,, \\ (-1,-1,0,0) &= -(1,1,0,1) - (0,1,1,0) + (0,1,1,1)\,. \end{aligned}$$

Maticí homomorfismu f vzhledem k bázím M, N je tedy matice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Rovnost (1) z věty 11.2 má tvar

$$\begin{pmatrix} -b-c \\ 2a+2b \\ -c \\ a+2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ;$$