KMI/DISK1 - Sbírka úloh

Tento text je určen studentům informatických oborů na Univerzitě Palackého v Olomouci. Jedná se pouze o doplňující materiál k učebnímu textu Diskrétní struktury 1 (dále **DISK1***) a v žádném případě nemůže být použit jako náhrada uvedeného textu.*

Informace ke kurzu:

- Během semestru jsou povoleny **3 absence** na cvičení.
- Během semestru se budou psát **2 zápočtové písemky** (zpravidla jedna v 6. týdnu a druhá ve 12. týdnu). Z každé zápočtové písemky je možné získat maximálně 100 bodů, k zápočtu je nutné získat **alespoň 120 bodů v součtu z obou písemek** a z **každé písemky alespoň 50 bodů**. Každý student bude mít možnost si jakoukoliv písemku opravit v posledním týdnu semestru, přičemž se do hodnocení bude počítat písemka, ve které student dosáhne vyššího bodového zisku.
- Materiál **DISK1** nalezente na osobních stránkách doc. Kolaříka.

Poslední změna: 28. listopadu 2023.

1 Indukce

Dokažte matematickou indukcí následující tvrzení:

- (T_1) $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
- (T_2) $6^n - 1$ je číslo dělitelné 5,
- (T_3) $3^n - 1$ je sudé číslo,
  - $$\text{(1) pro } n = 1 \text{ zjevně platí}$$
    $$\text{(2) indukční krok:}$$
    $$2 \mid 3^{n+1} - 1$$
    $$3^{n+1} - 1 = 2x, \ \textit{pro } x \in \mathbb{N}$$
    $$3^n \cdot 3 - 1 = 2x$$
    $$3^n \cdot 3 - 1 - 2 + 2 = 2x$$
    $$3^n \cdot 3 - 3 + 2 = 2x$$
    $$3(3^n - 1) + 2 = 2x$$

    V posledním řádku můžeme využít indukční předpoklad a tedy víme, že výraz v závorce je sudé číslo. Pokud sudé číslo vynásobíme 3, dostaneme zase sudé číslo a následným přičtením čísla 2 nám zůstane stále sudé číslo. Tím je důkaz hotov.
- (T_4) $n! > 3^n$ pro $n \geq 7$,
  - $$\text{(1) pro n = 7 :}$$
    $$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040 > 3^7 = 2187 \text{ platí}$$
    $$\text{(2) indukční krok (pro } n \geq 7\text{):}$$
    $$(n+1)! > 3^{n+1}$$
    $$(n+1) \cdot n! > 3^n \cdot 3$$

    Z posledního řádku už platnost vztahu plyne jednoduše. Z předpokladu opět víme, že $n! > 3^n$ a jelikož pracujeme s $n \geq 7$, tak $(n+1) > 3$ a tedy nerovnice je vždy platná.
- (T_5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
  - $$\text{(1) pro } n = 1 \text{ platí}$$
    $$\text{(2) indukční krok:}$$
    $$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

    Využijeme předpokladu a upravíme levou stranu:
    $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\frac{2n^3+n^2+2n^2+n}{6}+(n+1)^2=\frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}$$
$$\frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6}{6}=\frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6}$$
$$\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

Poslední rovnice zjeně platí. Tím je důkaz hotov.

- (T_6) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$,
  - $$\text{(1) pro } \ n=1 \text{ platí}$$
    $$\text{(2) indukční krok:}$$
    $$1+3+5+...+(2n-1)+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$$

    Využijeme indukčního předokladu a upravíme výraz.

    $$n^2+(2n+1)=n^2+2n+1$$

    Což zjevně platí.

2 Základy logiky

2.1 Základní pojmy

- *Výrok* je tvrzení, u kterého má smysl uvažovat o jeho pravdivosti.
  - **Prší.** - Je výrokem
  - **Červené kolo.** - Není výrokem
- Logika má symbolický charakter - odhlížíme od obsahu a výroky zapisujeme pomocí *výrokových symbolů* (p,q,r,...).
- Výroky můžeme spojovat pomocí *logických spojek* (viz. Obrázek 1) do *složených výroků.*
  - **Prší.** - Atomický výrok.
  - **Pokud prší, pak jsou silnice mokré.** - Složený výrok.
- *Pravdivost* formulí je určena pravdivostí daných výroků a vyhodnocením pravdivostních funkcí daných výrokových spojek.

název	zápis v přirozeném jazyce	symbol	pravdivostní funkce	tabulka pravd. funkce
negace	"ne"	$\neg$	$\neg^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|c} a & \neg^{\cdot} a \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$
konjunkce	"a"	$\wedge$	$\wedge^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|cc} \wedge^{\cdot} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$
disjunkce	"nebo"	$\vee$	$\vee^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|cc} \vee^{\cdot} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$
implikace	"jestliže . . . , pak . . . "	$\rightarrow$	$\rightarrow^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|cc} \rightarrow^{\cdot} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$
ekvivalence	". . . , právě když . . . "	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|cc} \leftrightarrow^{\cdot} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$

Obrázek 1: Základní logické spojky.

2.2 Vyhodnocení pravdivosti výroku

V následujícím textu budeme zapisovat stejně **symboly** logických spojek a jejich **pravdivostní funkce**. Čtenář by měl být schopen poznat z kontextu, jestli se jedná o symbol nebo o funkci.

Je-li dán výrok V v přirozeném jazyce a máme-li určit jeho pravdivostní hodnotu, postupujeme následovně:

1. Určíme atomické výroky $V_1, V_2, ..., V_n$, ze kterých se V skládá.
2. Určíme pravdivostní hodnoty $e(V_1), e(V_2), ..., e(V_n)$ atomických výroků $V_1, ..., V_n$. Hodnoty $e(V_i)$ jsou součástí zadání nebo je zjistíme nebo je známe.
3. Výrok V zapíšeme v symbolické podobě, dostaneme např. $V_1 \wedge (V_2 \rightarrow V_3)$.
4. Je-li V atomický výrok, pak $||V||_e = e(V)$.
5. Je-li V složený výrok, tj. má jeden z tvarů $\neg V_1, V_1 \wedge V_2, V_1 \vee V_2, V_1 \implies V_2, V_1 \leftrightarrow V_2$, pak jeho pravdivostní hodnotu určíme podle pravidel:
   (a) $||\neg V_1||_e = \neg ||V_1||_e$,
   (b) $||V_1 \wedge V_2||_e = ||V_1||_e \wedge ||V_2||_e$,
   (c) $||V_1 \vee V_2||_e = ||V_1||_e \vee ||V_2||_e$,
   (d) $||V_1 \rightarrow V_2||_e = ||V_1||_e \implies ||V_2||_e$,
   (e) $||V_1 \leftrightarrow V_2||_e = ||V_1||_e \leftrightarrow ||V_2||_e$.

Příklady na vyhodnocování pravdivostních hodnot výroků

2.2.1 Zapište symbolicky následující výrokové formule a vyhodnoťte jejich pravdivost

1. Číslo 10 je prvočíslo.
   (a) Symbolicky: V_1.
   (b) Dle bodu 4 je hodnota rovna $||V_1||_e = 0$ (nepravda).
2. Není pravda že, číslo 10 je prvočíslo. / Číslo 10 není prvočíslo.
   (a) Symbolicky: $\neg V_2$.
   (b) Dle bodu 5 je hodnota rovna $\neg ||V_2||_e = 1$
3. X je prvočíslo a zároveň X je sudé. - Ověřte pravdivost pro X=1,2,5,8.
   (a) Symbolicky: $V_2 \wedge V_3$.
   (b) Ve tvaru konjunkce z bodu 5, tudíž hodnota je určena $||V_2||_e \wedge ||V_3||_e$.
4. X je menší než Y nebo X je prvočíslo. - Ověřte pravdivost pro X=5, Y=2 / X=3, Y=7.
   (a) Symbolicky: $V_4 \vee V_2$.
   (b) Podobně jako v 3b.
5. Jestliže X je menší než 2, pak X je menší než 4. - Platí pro každé reálné X?
6. X je menší než 2, právě když X je menší než 4. - Platí pro každé reálné X? Ověřte pravdivost pro X=1 / X=5 / X=3.

2.3 Příklad

Jsou dány tři atomické výroky:

S: Svítí Slunce.
D: Na obloze je duha.
P: Prší.

Následující složené výroky přepište z přirozeného jazyka do symbolické formy:

1. Neprší a svítí Slunce.
   - $\neg P \wedge S$
2. Pokud nesvítí Slunce, pak na obloze není duha.
   - $\neg S \rightarrow \neg D$
3. Není pravda, že je na obloze duha a zároveň neprší.
   - $\neg(D \wedge \neg P)$
4. Na obloze není duha právě tehdy, když prší nebo svítí Slunce.
   - $\neg D \leftrightarrow (P \vee S)$
5. Pokud nesvítí Slunce a zároveň je na obloze duha, pak neprší.
   - $(\neg S \wedge D) \rightarrow \neg P$
6. Svítí Slunce a na obloze není duha, nebo prší a na obloze je duha.
   - $(S \wedge \neg D) \vee (P \wedge D)$

2.4 Pravdivost výroků s kvantifikátory

- *Výroková forma* - výrok, který obsahuje proměnné.
- *Všeobecný kvantifikátor* - značíme $\forall$.
- *Existenční kvantifikátor* - značíme $\exists$.
- **Dávejte si pozor na pořadí kvantifikátorů ve výroku!**
- **Úplné formy** (ÚF) výroků vznikají dle následujících pravidel:
  - $\forall$: "Pro každé x platí, že jestliže $P(x)$, pak $V(x)$".
  - $\exists$: "Existuje x tak, že $P(x)$ a $V(x)$."

2.4.1 Následující výrokové formy (a) převeďte do textové formy a (b) vyhodnoťte jejich pravdivost:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 > 0$
   (a) (ÚF) Pro každé x platí, že pokud x je reálné, pak $x^2 > 0$. (Zkrácená forma: Pro každé reálné číslo x platí $x^2 > 0$.
   (b) Není pravda pro $x = 0$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 1$
   (a) Pro každé reálné číslo x existuje reálné číslo y takové, že platí $x + y = 1$.
   (b) Je pravda.
3. $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x + y = 1$
   (a) Existuje reálné číslo y takové, že pro každé reálné číslo x platí $x + y = 1$.
   (b) Není pravda.
4. $\forall x$ (x je čtverec $\Rightarrow$ x je obdelník)
   (a) Pro každé x platí, že jestliže x je čtverec, pak x je obdélník.
   (b) Je pravda.
5. $\forall x\, \forall y \in \mathbb{R}\ (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$
   (a) Pro každá dvě reálná čísla x a y platí, že pokud x je ostře menší než y, pak x^2 je ostře menší než y^2.
   (b) Není pravda: stačí vhodně zvolit x záporné a y kladné.
6. $\exists x$ (x je prvočíslo $\wedge$ x je sudé číslo).
7. $\exists x\, \exists y\ (x^2 + y^2 = 2xy)$

2.4.2 Doplněním vhodných kvantifikátorů před proměnné utvořte z uvedených výrokových forem pravdivé výroky

1. Pro reálné číslo x platí $x^2 + 1 > 0$. [2 řešení]
   (a) Pro každé reálné číslo x platí $x^2 + 1 > 0$.
      - ÚF - Pro každé x platí, že jestliže je x reálné, pak $x^2 + 1 > 0$.
   (b) Existuje reálné číslo x takové, že $x^2 + 1 > 0$.
      - ÚF - Existuje x takové, že x je reálné a zároveň $x^2 + 1 > 0$.
2. Pro čísla x, y platí $x^2 + y^2 = 0$
   (a) Existuje reálné číslo x a reálné číslo y, pro které platí $x^2 + y^2 = 0$.
      - ÚF - Existuje x tak, že x je reálné a zároveň existuje y tak, že y je reálné a platí $x^2 + y^2 = 0$.
3. Pro čísla x, y platí, že pokud x je prvočíslo pak $x * y$ je prvočíslo.
4. Pro číslo x platí $|x| = -x$.

2.5 Negace výroků

Negací výroku T by měl vzniknout nový výrok N tak, že pro každé ohodnocení e platí $||T||_e = 1$ právě když $||N||_e = 0$.

1. Negace atomického výroku – přidáním **není pravda, že...** případně vhodná změna formy výroku (např. změna slovesa **je** za sloveso **není**, atp.)
2. Negace všeobecného kvantifikátoru = existenční kvantifikátor (promyslete).
3. Negace existenčního kvantifikátoru = všeobecný kvantifikátor (promyslete).
4. Negace konjunkce = $\neg A \vee \neg B$ (dle tabulky)

A	B	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
1	**1**	1	0
1	**0**	0	1
0	**1**	0	1
0	**0**	0	1

5. Negace disjunkce = $\neg A \wedge \neg B$

A	B	$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
1	**1**	1	0
1	**0**	1	0
0	**1**	1	0
0	**0**	0	1

6. Negace implikace = $A \wedge \neg B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
1	**1**	1	0
1	**0**	0	1
0	**1**	1	0
0	**0**	1	0

7. Negace ekvivalence = $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$ (ověřte)
   Nápověda: $A \Leftrightarrow B$ je zkratkou za $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

2.6 (a) Zjistěte pravdivost následujících výroků a (b) utvořte jejich negace

1. Pro každé přirozené číslo x platí, že x je dělitelné pěti.
   (a) Není pravda.
   (b) Existuje přirozené číslo x takové, že x není dělitelné pěti.
2. Každé celé číslo je racionální.
   (a) Pravda.
   (b) Existuje alespoň jedno celé číslo, které není racionální.
3. Každé číslo dělitelné číslem 48 je dělitelné čísly 2 a 3.
   (a) Pravda.
   (b) Existuje číslo dělitelné číslem 48, které není dělitelné číslem 2 nebo není dělitelné číslem 3.
      - Symbolický zápis původního výroku (bez kvantifikátoru): $V_1 \to (V_2 \wedge V_3)$ (zdůvodněte).
      - Negace (využijeme pravidel odvozených výše - ověřte):
      $$\neg[V_1 \to (V_2 \wedge V_3)] = V_1 \wedge \neg(V_2 \wedge V_3) = V_1 \wedge (\neg V_2 \vee \neg V_3)$$
      - Všeobecný kvantifikátor se negací změní na existenční.
      - Podle znegovaného výrazu vytvoříme textovou podobu negovaného výroku (viz. výše)
4. Součet každých dvou celých čísel není roven 0.
   (a) Nepravda.
   (b) Existuje alespoň jedna dvojice celých čísel, jejichž součet je roven 0.
5. Existují alespoň dvě přímky v rovině, které nejsou rovnoběžné.
   (a) Pravda.
   (b) Pro každé dvě přímky v rovině platí, že jsou rovnoběžné.
6. Každé celé číslo je sudé nebo liché.
   (a) Pravda.
   (b) Existuje celé číslo, které není sudé a zároveň není liché.
7. Druhá mocnina každého reálného čísla je větší než 0.
   (a) Nepravda.
   (b) Existuje reálné číslo, jehož druhá mocnina není větší než 0.
8. V následujícím souboru dat je nejvíce 10 položek.
9. Pokud venku prší a je pod nulou, pak venku vzniká námraza.
10. Každý mnohoúhelník má alespoň tři úhly.
11. Na zasedání přišlo právě 40 členů.
12. Existuje prvočíslo x takové, že $x + 2$ je prvočíslo.

3 Výroková logika

Pro řešení příkladů z následující kapitoly je nutná znalost níže uvedených pojmů:

- *Jazyk výrokové logiky* - viz. Definice 1.7 [DISK1]
- *Formule jazyka výrokové logiky* - viz. Definice 1.8 [DISK1]
- *Pravdivostní ohodnocení* - viz. Definice 1.11 [DISK1]
- *Pravdivostní hodnota formule* - viz. Definice 1.13 [DISK1]
- O formuli φ řekneme, že je *splnitelná*, právě když existuje alespoň jedno pravdivostní ohodnocení e takové, že $||\varphi||_e = 1$.
- Formule φ se nazývá *tautologie*, právě když pro **každé ohodnocení** e platí $||\varphi||_e = 1$.
- Formuli φ se nazývá *kontradikce*, právě když pro **každé ohodnocení** e platí $||\varphi||_e = 0$.
- Formule φ sémanticky vyplývá z množiny formulí T, jestliže φ je pravdivá pro každé ohodnocení, pro které je pravdivá každá formule z T.
- Formule φ a formule ψ se nazývají *sémanticky ekvivalentní*, právě když φ sémanticky vyplývá z ψ a zároveň ψ sémanticky vyplývá z φ.
- Mějme množinu V výrokových symbolů.
  - *Literál* je libovolný výrokový symbol z V nebo jeho negace.
  - *Úplná elementární konjunkce* (ÚEK) vznikne konjunkcí literálů, kde se každý symbol z V vyskytuje právě v jednom *literálu.*
  - *Úplná elementární disjunkce* (ÚED) vznikne disjunkcí literálů, kde se každý symbol z V vyskytuje právě v jednom *literálu.*
  - *Úplná konjunktivní normální forma* (ÚKNF) vznikne konjunkcí úplných elementárních disjunkcí nad V.
  - *Úplná disjunktivní normální forma* (ÚDNF) vznikne disjunkcí úplných elementárních konjunkcí nad V.
  - Detailní popis tvorby ÚKNF a ÚDNF najdete v materiálech [DISK1].

3.1 Tabulková metoda

Tabulková metoda slouží k ověřování pravdivosti výrokových formulí pro různá ohodnocení jejich výrokových symbolů.

3.1.1 Pro následující výrokové formule tabulkovou metodou ověřte, zda se jedná o tautologie

1. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
2. $\neg([(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p)$
3. $[(p \wedge s) \to \neg q] \vee \neg s$
4. $p \to \neg p$ (Nejprve zkuste odhadnout a zdůvodněte vaše rozhodnutí.)
5. $q \to q$ (Nejprve zkuste odhadnout a zdůvodněte vaše rozhodnutí.)
6. $(\neg p \vee q) \vee [p \wedge (\neg r \leftrightarrow q)]$

Řešení

1. $\varphi = (p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

p	**q**	$(p \to q)$	$\neg q \to \neg p$	φ
0	**0**	1	1	1
1	**0**	0	0	1
0	**1**	1	1	1
1	**1**	1	1	1

Závěr: Výroková formule φ je tautologií.

2. $\varphi = \neg([(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p)$

p	**q**	$(p \to q)$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$	φ
0	**0**	1	1	1	0
0	**1**	1	0	1	0
1	**0**	0	0	0	0
1	**1**	1	0	0	0

Závěr: Výroková formule φ není tautologií (je kontradikcí).

3. $[(p \wedge s) \rightarrow \neg q] \vee \neg s$

p	**q**	**s**	$p \wedge s$	$\neg q$	$(p \wedge s) \rightarrow \neg q$	φ
0	**0**	**0**	0	1	1	1
0	**1**	**0**	0	0	1	1
1	**0**	**0**	0	1	1	1
0	**0**	**1**	0	1	1	1
1	**1**	**0**	0	0	1	1
1	**0**	**1**	1	1	1	1
0	**1**	**1**	0	0	1	1
1	**1**	**1**	1	0	0	0

Závěr: Výroková formule φ není tautologií (je splnitelná).

3.1.2 Pomocí tabulkové metody ověřte, zda jsou formule φ a ψ sémanticky ekvivalentní

1. $\varphi = \neg(p \wedge q)$; $\psi = \neg p \vee \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	φ	ψ
1	**1**	0	0	1	0	0
1	**0**	0	1	0	1	1
0	**1**	1	0	0	1	1
0	**0**	1	1	0	1	1

   Závěr: Formule φ a ψ jsou sémanticky ekvivalentní.

   Zápis: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

2. $\varphi = p \to q$; $\psi = \neg q \to \neg p$

3. $\varphi = p \to q$; $\psi = \neg p \to q$

4. $\varphi = p \wedge (q \vee r)$; $\psi = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

3.1.3 Pomocí tabulkové metody ověřte, zda formule φ sémanticky vyplývá z dané množiny formulí T

1. $T = \{p \to q; \neg q\}, \varphi = \neg p$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$
1	**1**	0	0	1
1	**0**	0	1	0
0	**1**	1	0	1
0	**0**	1	1	1

   Závěr: φ sémanticky plyne z T.

   Zápis: $T \models \varphi$

2. $T = \{p \to q; \neg q \to p; \neg r\}, \varphi = q$

   Závěr: φ sémanticky plyne z T.

3. $T = \{q \leftrightarrow \neg p; \neg q \to \neg r; p \vee r\}, \varphi = r \to \neg p$

   Závěr: φ sémanticky plyne z T.

4. $T = \{p \to \neg q; q; \neg(((p \to \neg q) \vee r) \leftrightarrow (r \wedge \neg q))\}$

   (a) $\varphi = r \wedge \neg q$, **(NE)**

   (b) $\varphi = r$, **(NE)**

   (c) $\varphi = (p \to \neg q) \vee r$ **(ANO)**.

3.2 Pro každou dvojici formulí φ a ψ (kde $\varphi \neq \psi$) z množiny A ověřte, zda $\varphi \models \psi$

$A = \{\neg(p \vee q); p \wedge q; q \vee \neg q; \neg(p \leftrightarrow q); \neg p \to \neg q\}$

3.3 Tvorba úplné konjunktivní/disjunktivní normální formy

3.3.1 Převeďte následující formule do ÚKNF a ÚDNF

1. $\varphi = (b \vee \neg c) \rightarrow (a \wedge \neg b)$

a	**b**	**c**	$b \vee \neg c$	$a \wedge \neg b$	φ	ÚED/ÚEK
0	**0**	**0**	1	0	0	$a \vee b \vee c$
0	**1**	**0**	1	0	0	$a \vee \neg b \vee c$
1	**0**	**0**	1	1	1	$a \wedge \neg b \wedge \neg c$
0	**0**	**1**	0	0	1	$\neg a \wedge \neg b \wedge c$
1	**1**	**0**	1	0	0	$\neg a \vee \neg b \vee c$
1	**0**	**1**	0	1	1	$a \wedge \neg b \wedge c$
0	**1**	**1**	1	0	0	$a \vee \neg b \vee \neg c$
1	**1**	**1**	1	0	0	$\neg a \vee \neg b \vee \neg c$

ÚKNF - $(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$
ÚDNF - $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$

Jsou uvedené formule (ÚKNF, ÚDNF) **sémanticky ekvivalentní** s formulí φ? Zdůvodněte.

2. $\varphi = \neg p \wedge (q \rightarrow \neg p)$
3. $\varphi = (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. $\varphi = \neg((\neg p \rightarrow \neg q) \wedge \neg r)$
5. $\varphi = ((p \leftrightarrow \neg q) \wedge (\neg r \wedge p)) \rightarrow (p \vee \neg r)$

4 Množiny

Ke studiu kapitoly je nutná znalost následujících pojmů:

- Pojem *množina* je matematických protějškem běžně používaných pojmů *soubor*, *seskupení*, apod. Jedná se o objekt, který obsahuje jiné objekty, tzv. *prvky množiny*. V množině **nezáleží** na pořadí prvků.
- *Potenční množina* na množině X je množinou všech podmnožin X a značíme ji 2^X.
- Význačné číselné množiny: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Pří práci s množinami často uvažujeme nějaké *univerzum* a pracujeme pouze s podmnožinami daného univerza. Univerzum tedy představuje všechny prvky, které se v daných podmnožinách mohou vyskytovat. *Doplňkem* množiny X nazveme množinu $U \setminus X$ a značíme ji $\overline{X}$, tedy $\overline{X} = U \setminus X$.
- *Prázdná množina* je množina, která neobsahuje žádný prvek.
- Množina X je *podmnožinou* množiny Y (zn. $X \subseteq Y$), právě když platí následující implikace:
$$\forall x \in U \text{ platí: pokud } x \in X, \text{ pak } x \in Y$$
- Množina X je *vlastní podmnožinou* množiny Y (zn. $X \subset Y$), právě když $X \subseteq Y$ a zároveň $X \neq Y$.
- Další důležité pojmy a jejich definice naleznete v kapitole 2.2 v materiálu DISK1.

4.1 Zapište následující množiny výčtem prvků

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 7\}$
   - *Řešení:* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -5 \ \wedge \ x < 4\}$
3. $C = \{x \mid x \text{ je prvočíslo } \wedge \ x \text{ je sudé}\}$
4. $C_2 = \{x \mid x \text{ je prvočíslo } \vee \ x \text{ je sudé}\}$ (stačí vhodně okomentovat)
5. $D = \{y \in \mathbb{Z} \mid 2y + 2 = 5\}$
6. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq -5 \ \wedge \ x < 4\}$
7. Pro $X = \{\{a, b\}, c, d\}$ nalezněte 2^X.
8. Pro $X = \emptyset$ nalezněte 2^X.
9. Pro $Z = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ nalezněte 2^Z.

4.2 Rozhodněte, zda platí následující

1. Množina $X = \{0, 1, \{2, 3\}, 3, 2, 0, \{1, \{2, 3\}\}\}$ obsahuje 6 prvků.
2. Množina $X = \{1, 3, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\}\}$ obsahuje 5 prvků.
3. $\{1, 5, 5, 2, 3, 6, 1\} = \{1, 2, 2, 6, 5, 3, 3\}$
   - *Řešení:* Ano.
4. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$
   - *Řešení:* Ano.
5. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
6. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{I}$
7. $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{C}$
8. $\{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\} \subseteq \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$
9. $\{a, c, d\} \subset \{a, c, d, d\}$
10. $\{x$ je prvočíslo $\vee$ x je liché$\} \subset \{3, 5, 7, 9, 11, ...\}$
11. $\{x$ je prvočíslo $\wedge$ x je liché$\} \subset \{3, 5, 7, 9, 11, ...\}$
12. Pro každé X platí $\emptyset \subseteq X$.
13. Pro každé X platí $\emptyset \subset X$.
14. $\{0\} \subseteq \emptyset$
15. $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
16. $\emptyset \subseteq \emptyset$

4.3 Příklady na operace s množinami

1. Jsou dány následující množiny $A = \{a, b, c, \{c, d\}, e, f, h\}$ a $B = \{c, d, f, h\}$. Zapište výsledky následujících operací: $A \cap B, B \cup A, A \setminus B, B \setminus A$.

   - $A \cap B = \{c, f, h\}$
   - $B \cup A = \{a, b, c, \{c, d\}, d, e, f, h\}$
   - $A \setminus B = \{a, b, \{c, d\}, e\}$
   - $B \setminus A = \{d\}$

2. Jsou dány následující množiny $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -6 \ \wedge \ x < 2\}$ a $Y = \{y \in \mathbb{Z} \mid y > -1 \ \wedge \ y < 10\}$. Zapište výsledky následujících operací: $X \cap Y, X \setminus Y, Y \setminus X, X \cup Y$.

3. Nalezněte množiny A, B, pro které platí následující vztahy:
   $A \cap B = \{x, y, z\}$, $B \cup A = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$, $A \setminus B = \{s, t, w\}$, $B \setminus A = \{u, v\}$

4. Jsou dány následující množiny:
   $X = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \geq -9 \wedge x < 5) \vee (x > 5 \wedge x \leq 7)\}$
   $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 6\}$
   $Z = \{z \in \mathbb{R} \mid 0 \leq z < 5\}$.

   Zapište intervalově výsledky následujících operací:

   (a) $X \cap Y = \langle -1; 5) \cup (5; 6\rangle$
   (b) $Y \cap Z$
   (c) $Z \cap X \cap Y$
   (d) $(X \cup Z) \cap Y$
   (e) $\overline{X}$
   (f) $X \setminus Z$
   (g) $Z \setminus X$

5. Na oboru $\mathbb{R}$ jsou definovány intervaly $A = (-\infty; -1\rangle$, $B =$ (-3;3), $C = \langle 1, 10\rangle$. Zapište výsledky množinových operací:

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap C$
   (c) $\overline{B}$
   (d) $(A \cup C) \cap B$
   (e) $B \setminus C$

6. Najděte množiny A,B,C, pro které platí všechny uvedené podmínky:

   - $A \cap \overline{C} = \{2\}$
   - $A \cap B = \{2, \{7\}, 11\}$
   - $A \cap B \cap C = B \cap C = \{11, \{7\}\}$
   - $A \cup B = \{\{1, 3, 5\}, 2, \{3\}, \{3, 7\}, \{7\}, 11, 12, 19\}$
   - $C \cup B = \{1, 2, 5, \{1, 3, 5\}, \{3, 7\}, \{3\}, 7, \{7\}, 11, 12, 19\}$
   - $B \setminus C = \{2, \{3, 7\}, \{3\}, 12\}$

Nápověda: Zkuste si nakreslit Vennovy diagramy

7. Pomocí Vennových diagramů vyřešte následující problémy:

   (a) Ve městě Vidlákov byly za poslední měsíc uspořádány tři koncerty. První koncert měla skupina B, druhý skupina A a třetí měl zpěvák C. Na skupinu B přišlo 1221 občanů města, na skupinu A 785 občanů a na zpěváka C 613 občanů. Ani na jeden koncert se nešlo podívat 104 občanů. Všechny tři koncerty navštívilo 198 občanů. Na koncert skupiny B a zároveň na skupinu A přišlo 267 občanů, na skupinu B a zároveň na zpěváka C 399 občanů. Na skupinu A a zároveň na zpěváka C přišlo 255 občanů.

      i. Kolik občanů města přišlo pouze na skupinu B?
      ii. Kolik občanů města přišlo pouze na skupinu A?
      iii. Kolik občanů přišlo alespoň na dva koncerty?
      iv. Kolik občanů žije ve městě Vidlákov?

   (b) Dle průzkumu ve firmě hovoří 70 % zaměstnanců anglicky a 60 % zaměstnanců německy, přičemž 15 % zaměstnanců nemluví ani jedním z těchto jazyků. Určete, kolik zaměstnanců hovoří oběma jazyky.
   Řešení: 45 %

   (c) V průzkumu bylo tázáno 700 studentů na jejich sportovní záliby. Bylo zjištěno následující: 48 % studentů sleduje sport A; 53 % sleduje sport B; 57 % sport C; 27 % studentů sleduje sporty A i B; 28 % sport B i C; 30 % C i A; 18 % studentů sleduje sporty A, B i C. Odpovězte na následující otázky:

      i. Kolik studentů nesleduje žádný sport?
      ii. Vyjádřete poměrem, kolik studentů sleduje pouze sport A ku těm, kteří sledují pouze sport B.
      iii. Kolik studentů sleduje pouze jeden sport?
      iv. Kolik studentů sleduje alespoň 2 sporty?
      v. Kolik studentů sleduje sporty B nebo C, ale nesleduje sport A?

   (d) Při sociologickém výzkumu bylo zjištěno, že v okresním městě Jindřichův Hradec ze 400 respondentů sympatizuje 40 procent s politickým programem strany Modrých a strany Žlutých. Přitom se stranou Modrých sympatizuje o 160 respondentů více než se stranou Žlutých a neexistuje respondent, který by nesympatizoval se stranou Modrých nebo Žlutých. Kolik procent respondentů sympatizuje pouze se stranou Žlutých?

   (e) Z 825 oslovených osob 380 uvedlo, že používá počítač pouze doma nebo v zaměstnání. Počet osob, které používají počítač doma, je dvakrát větší než počet těch, kteří používají počítač doma i v zaměstnání. Počet osob, které používají počítač doma, je také o 40 menší než počet těch, kteří používají počítač pouze v zaměstnání. Kolik oslovených osob používá počítač pouze v zaměstnání?
   Řešení: 210 osob pouze v zaměstnání (85 osob pouze doma)

   (f) Organizátor výstavy „Stavím, stavíš, stavíme“ rozdělil expozici do dvou částí. Protože ho zajímala reakce návštěvníků výstavy, vyplnil každý návštěvník při odchodu jednoduchý dotazník. Vyplynuly z něj tyto zajimavé skutečnosti:

      - 96 % návštěvníků, kterým se líbila první část, se líbila i druhá část
      - 60 % návštěvníků, kterým se líbila druhá část, se líbila i první část
      - 59 % návštěvníků, se nelíbila ani první ani druhá část

      Kolika procentům návštěvníků se líbila první část?

Řešení:

i. Označme si množinu účastníků první výstavy jako A, množinu účastníků druhé výstavy jako B a množinu všech účastníků jako U. (Uvádím zde početní řešení - opravdu to můžeme takhle řešit, protože velikosti množin nejsou nic jiného než nezáporná celá čísla.)

ii. 96 % návštěvníků, kterým se líbila první část, se líbila i druhá část - tato informace nám říká, že
$$0.96 \cdot |A| = |A \cap B|$$

iii. 60 % návštěvníků, kterým se líbila druhá část, se líbila i první část - tato informace nám říká, že
$$0.6 \cdot |B| = |B \cap A|$$

iv. 59 % návštěvníků, se nelíbila ani první ani druhá část - tato informace nám říká, že
$$|U| = |A \cup B| + 0.59 = 1$$
$$|A \cup B| = 1 - 0.59 = 0.41$$

v. Informace (ii) a (iii) nám dohromady uvádí, že
$$0.96 \cdot |A| = 0.6 \cdot |B|$$
a tedy
$$|B| = \frac{0.96 \cdot |A|}{0.6}$$

vi. Cílem je zjistit
$$|A| = ?$$

vii. Nejprve je třeba si uvědomit, že (nakreslete si Vennovy diagramy)
$$|A| = |A \cup B| - 0.4 \cdot |B| = 0.41 - 0.4 \cdot |B|$$
využitím (v) upravíme
$$|A| = 0.41 - 0.4 \cdot \frac{0.96}{0.6} \cdot |A|$$
$$|A| = 0.41 - 0.64 \cdot |A|$$
$$1.64 \cdot |A| = 0.41$$
$$|A| = 0.25$$

viii. **Odpovědí tedy je, že 25 % návštěvníků se líbila první část výstavy.**

(g) Při jednání poslanecké směmovny byl proveden průzkum pracovního vytížení přítomných poslanců. Bylo zjištěno, že kromě sledování průběhu projednávání zákona poslanci stíhají číst noviny, telefonovat a hrát hry na notebooku. Noviny čte 34 poslanců, telefonuje jich 36 a na notebooku hraje 38. Žádnou z těchto činností nevykonává a jednání sleduji 35 poslanců. Pouze dva poslanci pak stíhají všechny činnosti najednou. Čte a zároveň telefonuje 6 poslanců a 3 poslanci zároveň čtou a hrají hry. Telefonuje nebo hraje hry 65 poslanců. Určete, kolik poslanců:

i. pouze telefonuje,

ii. hraje hry nebo čte,

iii. dokáže vyokoávat alespoň dvě uvedené činnosti najednou,

iv. je přítomno v poslanecké sněmovně na jednání?

4.4 Relace

- *Kartézský součin* - viz. definice 2.11 [DISK1].
- *Relace* je libovolná podmnožina kartézského součinu.
- Relaci R na X nazveme *plnou relací*, právě když $R = X \times X$.
- Relaci R na X nazveme *prázdnou relací*, právě když $R = \emptyset$.
- Relaci R na X nazveme *relací identity*, právě když $R = \{\langle x, x\rangle \mid \text{pro každé } x \in X\}$.
- *Inverzní relací* k relaci $R \subseteq X \times Y$ je relace R^{-1} mezi Y a X definovaná předpisem $R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$.
- Relaci můžeme reprezentovat *množinově* (výčtem prvků), *maticí* nebo *grafem* - viz. sekce 2.3.4 [DISK1].
- U relací rozhodujeme zda platí mj. následující základní vlastnosti:
  - *Reflexivita* - Relace R na X je reflexivní, právě když
  $$\{\langle x, x\rangle \mid \text{pro každé } x \in X\} \subseteq R.$$
  - *Symetrie* - Relace R na X je symetrická, právě když
  $$\forall x, y \in X \text{platí: pokud } \langle x, y\rangle \in R, \text{pak } \langle y, x\rangle \in R.$$
  - *Tranzitivita* - Relace R na X je tranzitivní, právě když
  $$\forall x, y, z \in X \text{platí: pokud } \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R, \text{pak } \langle x, z\rangle \in R.$$
  - *Antisymetrie* - Relace R na X je antisymetrická, právě když
  $$\forall x, y \in X \text{platí: pokud } \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R, \text{pak } x = y.$$
- *Zobrazení* - viz. definice 2.27 [DISK1].
- Z definice plyne, že množina všech zobrazení je **podmnožinou** množiny všech relací, tj. každé zobrazení je relací, ale ne naopak.
- Vlastnosti zobrazení:
  - Zobrazení je *injektivní* (prosté) právě když, pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí, že pokud $x_1 \neq x_2$ pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.
  - Zobrazení je *surjektivní* právě když, pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ tak, že $f(x) = y$.
  - Zobrazení je *bijektivní* právě když je injektivní a surjektivní.

4.5 Příklady na relace

1. Jsou dány množiny $A = \{\{a\}, b\}$, $B = \{\{a, b\}, a, b\}$. Zapište výčtem prvků následující binární relace:

   (a) $A \times B$

   Řešení: $A \times B = \{\langle\{a\}, \{a, b\}\rangle, \langle\{a\}, a\rangle, \langle\{a\}, b\rangle, \langle b, \{a, b\}\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$

   (b) $B \times A$

   (c) $(A \times B) \cap (B \times A)$

2. Jsou dány množiny $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$. Určete, které z následujících množin tvoří binární relace mezi množinami X a Y:

   (a) $R_1 = \{\langle 1, a\rangle; \langle 1, b\rangle; \langle 1, c\rangle; \langle 2, a\rangle; \langle 2, b\rangle; \langle 2, c\rangle; \langle 3, a\rangle; \langle 3, b\rangle; \langle 3, c\rangle;$ $\langle 4, a\rangle; \langle 4, b\rangle; \langle 4, c\rangle\}$

   Řešení: Ano.

   (b) $R_2 = \{\langle a, 2\rangle; \langle a, 3\rangle; \langle a, 4\rangle\}$

   Řešení: Ne.

   (c) $R_3 = \emptyset$

   (d) $R_4 = \{\emptyset\}$

   (e) $R_5 = \{\langle 1, b\rangle; \langle 2, b\rangle; \langle 3, b\rangle; \langle 4, b\rangle; \langle 5, b\rangle\}$

3. Zapište jako binární relaci vztah dělitelnosti na množině $X = \{2, ..., 10\}$.

4. Nechť $A = \{\{a\}, b, c\}$ a $B = \{a, b, \{c, b\}\}$. Určete $(B \times A) \cap (A \times B)$.

5. Nechť $A = 2^X$ pro $X = \{1, 2, 3\}$ a definujme relaci R jako relaci „být podmnožinou“, tj. $X\ R\ Y$ právě když X je podmnožinou Y. Nalezněte relaci R na A.

6. Jsou dány relace R a S na množině $A = \{a, b, c\}$ následovně:
   $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$, $S = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle\}$. Nalezněte relaci $S^{-1} \circ R^{-1}$.

7. Nechť $A = \{a, b, c, d, e\}$. Na množině A definujme binární relaci R následovně:
   $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, c\rangle, \langle b, e\rangle\}$. Znázorněte relaci R orientovaným grafem a určete výčtem prvků relaci $R \circ R$.

8. Mezi množinami $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ jsou dány relace:
   $R = \{\langle x, 1\rangle, \langle x, 3\rangle, \langle y, 2\rangle, \langle y, 3\rangle, \langle z, 2\rangle\}$, $S = \{\langle x, 3\rangle, \langle y, 2\rangle, \langle z, 1\rangle, \langle z, 3\rangle\}$. Znázorněte relace pomocí matic M_R, M_S a dále vytvořte následující matice:

   (a) $M_{R \cup S}$

   (b) $M_{R \cap S}$

   (c) $M_{R - S}$

   (d) $M_{S - R}$

   (e) $M_{R^{-1}}$

   (f) $M_{R^{-1} \circ S}$

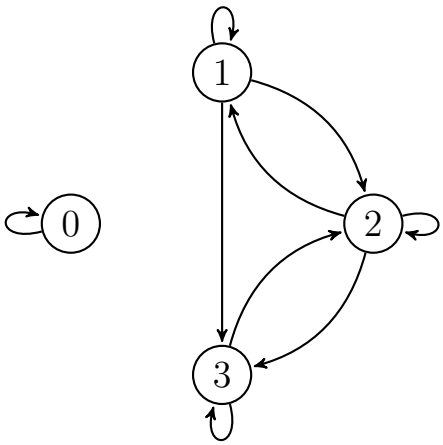
4.6 Příklady na vlastnosti relací

1. Nechť $X = \{0, 1, 2, 3\}$, na X máme definovanou relaci R následovně:
   $R = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$. Zapište relaci ve formě tabulky a grafu a následně určete, zda je relace reflexivní, tranzitivní, symetrická, antisymetrická.

   Řešení: Vytvoříme tabulku a do ní si vyznačíme, které prvky jsou spolu v relaci:

R	**0**	**1**	**2**	**3**
0	X			
1		X	X	X
2		X	X	X
3			X	X

   Vytvoříme orientovaný graf, znázorňující uvedenou relaci:



   Podle obrázků můžeme jednoduše ověřit vlastnosti relace:

   Tabulka:

   - *Reflexivita* je v tabulce znázorněna **křížky na hlavní diagonále**.
   - *Symetrie* platí, právě když je tabulka **osově souměrná** dle hlavní diagonály.
   - Relace je *tranzitivní*, právě když pro dané řádky určené prvky x a y platí, že pokud $\langle x, y\rangle \in R$, pak každý křížek v řádku y musí být rovněž **obsažen** v řádku x. Ověřte.
   - Relace je *antisymetrická*, právě když každé dva různé křížky **nejsou** souměrné dle hlavní diagonály. Ověřte.

   Graf: **promyslete**.

2. Nechť $X = \{a, b, c, d\}$, na X máme definovanou relaci R následovně:
   $R = \{\langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle c,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle a,b\rangle, \langle d,d\rangle, \langle d,b\rangle\ \langle a,a\rangle, \langle c,c\rangle\}$. Zapište relaci ve formě tabulky a grafu a následně určete, zda je relace reflexivní, tranzitivní, symetrická, antisymetrická.

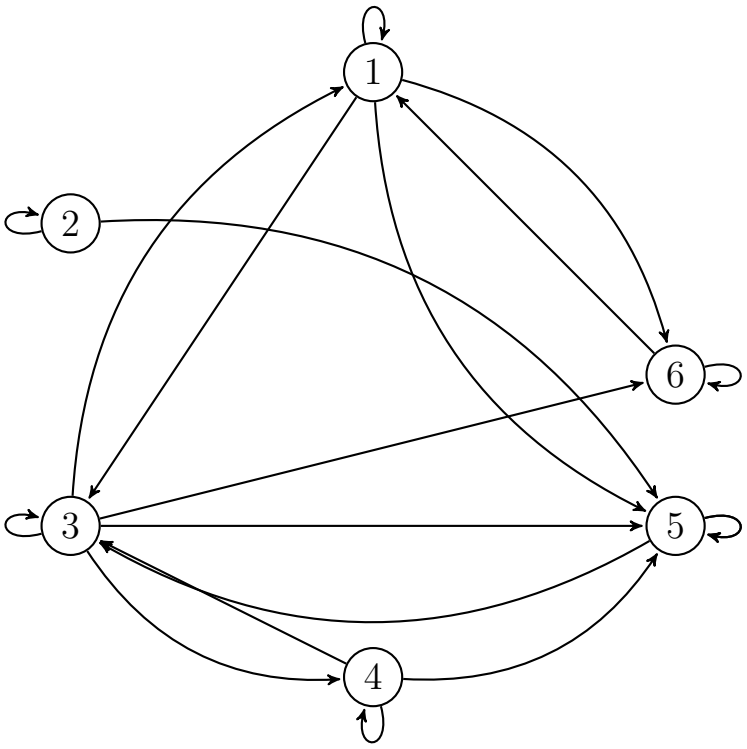
3. Pro následující binární relace rozhodněte, zda jsou reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní:

   (a) $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,2\rangle\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$

(b) Nápověda: Pro jednodušší ověřování vlastností si zkuste relaci vyjádřit ve formě grafu.

(c) $S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 6,1\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,2\rangle\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

Řešení: Vyjádříme relaci ve formě grafu:



Ověříme vlastnosti:

Reflexivita: U každého uzlu grafu musí být přítomna smyčka. - **PLATÍ**
Symetrie: NEPLATÍ - Chybí například relace $\langle 5,2\rangle$.
Antisymetrie: NEPLATÍ - Existuje například relace $\langle 1,6\rangle$ a $\langle 6,1\rangle$, ale $6 \neq 1$.
Tranzitivita: NEPLATÍ - Máme například relace $\langle 2,5\rangle$ a $\langle 5,3\rangle$, ale chybí relace $\langle 2,3\rangle$.

(d) Určeme A jako množinu všech lidí a relaci R na A definovanou vztahem „být rodičem“ (počítáme i prarodiče, atd.).

- **REF**: Neplatí (Určitě není každý člověk sám sobě rodičem).
- **SYM**: Neplatí (Pokud je X rodičem Y, pak nemůže být Y rodičem X).
- **ANTISYM**: Platí (zdůvodněte!).
- **TRA**: Platí (Pokud X je rodičem Y a zároveň Y je rodičem Z, pak X je rodičem (prarodičem) Z.

(e) Určeme A jako množinu celých čísel a relaci R tak, že $i\ R\ j$ právě když $|i-j| = 1$.

(f) Určeme A jako množinu celých čísel a relaci R tak, že $i\ R\ j$ právě když $|i-j| \leq n$ pro dané kladné číslo n.

4. Které z výše uvedených vlastností mají následující binární relace na množině přirozených čísel?

   (a) $m\ R\ n$ právě když $m|n$;

   Řešení: Relace je reflexivní (R), tranzitivní (T) a antisymetrická (A). Není symetrická (S).

   (b) $m\ R\ n$ právě když $m + n \geq 50$;

   Řešení: Je (S).

   (c) $m\ R\ n$ právě když $m * n$ je sudé;

   Řešení: Je (S).

   (d) $m\ R\ n$ právě když $m + n$ je násobek čísla 3;

   Řešení: Je (S).

   (e) $m\ R\ n$ právě když $m > n$.

   Řešení: Je (T), (A).

5. Na množině $N = \{a, b, c\}$ vytvořte binární relace tak, aby splňovaly následující podmínky:

   (a) R_1 není reflexivní, není symetrická, není antisymetrická, není tranzitivní;

   (b) R_2 je reflexivní, je symetrická, není antisymetrická, je tranzitivní;

   (c) R_3 není reflexivní, je symetrická, je antisymetrická, není tranzitivní;

   (d) R_4 není reflexivní, není symetrická, je antisymetrická, je tranzitivní;

   (e) R_5 je reflexivní, je symetrická, je antisymetrická, je tranzitivní.

4.7 Příklady na zobrazení

1. Následující relace mezi množinami $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ znázorněte graficky a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení. Pokud ano, rozhodněte, zda je injektivní nebo surjektivní (případně bijektivní):

   (a) $A = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 1\rangle\}$

   Relace je bijektivním zobrazení.

   (b) $B = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 1\rangle\}$

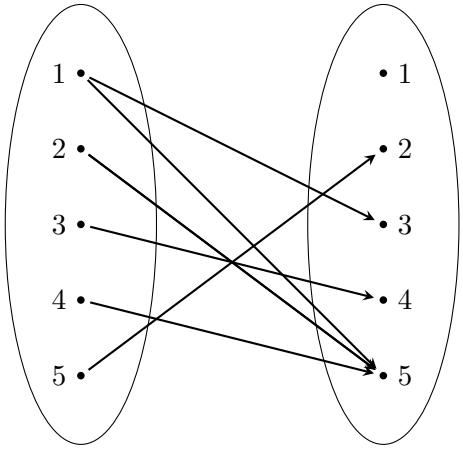
   Relace není zobrazení (je parciální zobrazení).

   (c) $C = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle\}$

   Relace je zobrazení (není surjektivní ani injektivní).

(d) $D = \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 5,2\rangle\}$

Znázorníme relaci graficky:



Relace **není** zobrazením, protože bod 1 je vzorem prvků 3 a 5.

2. Pro následující relace rozhodněte, zda se jedná o zobrazení. Pokud je relace zobrazením, rozhodněte, zda je injektivní, surjektivní případně bijektivní:

   (a) $R_1 = \{\langle x,y\rangle \text{ náleží do } X \times Y \mid x^2 + y^2 = 1\}$. $X = [-1,1]$, $Y = \mathbb{R}$.

   Není zobrazením.

   (b) $R_2 = \{\langle a,c\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle\}$. $X = \{a,b,c\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$.

   (c) $R_3 = \{\langle x,y\rangle \text{ náleží do } X \times Y \mid x = y^2\}$ pro $X = Y = \mathbb{R}$.

3. Určete, které z následujících relací mezi množinami X a Y ve tvaru $R_i = \{\langle x,y\rangle \in X \times Y\}$ jsou zobrazení z X do Y. V kladném případě určete, zda se jedná o zobrazení injektivní, surjektivní, popř. bijektivní:

   (a) X je množina jmen v českém kalendáři, Y je množina občanů ČR. R_1 je množina dvojic ve tvaru ⟨křestní jméno, občan⟩, kde občan y je nositelem křestního jména x.

   Řešení: Není zobrazení. Zdůvodněte.

   (b) X je množina studentů zapsaných na tomto předmětu, Y je množina rodných čísel těchto studentů. R_2 je množina dvojic ve tvaru ⟨student, jeho rodné číslo⟩.

   Řešení: Je zobrazení. Je injektivní, protože žádné rodné číslo není společné pro 2 a více studentů. Je surjektivní. Platily by stejné vlastnosti, kdyby Y byla množina rodných čísel všech lidí v ČR?

   (c) $R_3 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,a\rangle\}$, $X = Y = \{a,b,c,d\}$

   (d) $R_4 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$, $X = Y = \{a,b,c,d\}$

   (e) $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{N}, R_5$ je množina dvojic ve tvaru $\langle x,y\rangle$, kde $x + 1 = y$.

   (f) $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{N}, R_6$ je množina dvojic ve tvaru $\langle x,y\rangle$, kde $x = y$.

4. Existuje takové složené zobrazení $g \circ h$, které je bijektivní a zároveň g není surjektivní a h není injektivní? Co musí platit pro množiny, mezi kterými tato zobrazení vytváříme?

5. Pro množiny $A = \{a, b, c, d, e\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ najděte zobrazení f, g a množinu B, pro které platí následující podmínky:

   - f je injektivním zobrazením z A do B;
   - g je surjektivním zobrazením z B do C;
   - $f \circ g = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle d, 3\rangle, \langle e, 1\rangle\}$ je zobrazením z A do C.

5 Uspořádání, ekvivalence a rozklady

Pro zvládnutí kapitoly je nutná znalost následujících pojmů:

- Relaci E nazveme relací *ekvivalence* právě když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
- Pro prvek $x \in X$ se množina

$$[x]_E = \{y \in X | \langle x, y \rangle \in E\}$$

  nazývá *třída ekvivalence* určená prvkem x.
- Nechť X je neprázdná množina. *Rozklad* Π na množině X je systém podmnožin množiny X, tj. $\Pi \subseteq 2^X$, splňující:
  1. každá $A \in \Pi$ je neprázdná;
  2. pro každé $A, B \in \Pi$: pokud $A \neq B$, pak $A \cap B = \emptyset$;
  3. $\bigcup_{A \in \Pi} A = X$.
- Množiny $A \in \Pi$ se nazývají třídy rozkladu Π.
- Je-li E ekvivalence na X, pak systém

$$\Pi_E = \{[x]_E \mid x \in X\}$$

  je rozkladem na X (tzv. *rozklad indukovaný ekvivalencí* E).
- Je-li Π rozklad na X, pak binární relace E_Π na X definovaná

$$\langle x, y \rangle \in E_\Pi, \text{právě když } [x]_\Pi = [y]_\Pi$$

  je ekvivalence na X (tzv. *ekvivalence indukovaná rozkladem* Π).
- Platí $E = E_{\Pi_E}$ a $\Pi = \Pi_{E_\Pi}$.
- Relaci R nazveme *uspořádání* právě když je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická.
  - Relaci uspořádání často značíme dvojící $\langle X, \leq \rangle$ - tj. množina X je uspořádána relací $\leq$.
  - Skutečnost, že $\langle a, b \rangle \in \leq$ běžně značíme v infixové notaci $a \leq b$.
- Prvek x je *pokrytý* prvkem y vzhledem k uspořádání $\leq$ na X, píšeme $x \prec y$, právě když
  - $x \leq y$ a zároveň
  - pro každé z platí: když $x \leq z \leq y$ pak $z = x$ nebo $z = y$.
- *Hasseovy diagramy* [DISK1].
- Pro uspořádanou množinu $\langle X, \leq \rangle$ nazveme prvek x
  - *minimální*, jestliže pro každý $y \in X$ platí: pokud $y \leq x$, pak $x = y$,
  - *nejmenší*, jestliže $x \leq y$ pro každý $y \in X$,
  - *maximální*, jestliže pro každý $y \in X$ platí: pokud $x \leq y$, pak $x = y$,

– *největší*, jestliže $y \leq x$ pro každý $y \in X$.

- Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina a $A \subseteq X$. Definujeme

$$\mathcal{L}(A) = \{x \in X \mid x \leq y \text{ platí pro každé } y \in A\} \text{ (\textit{dolní kužel} množiny } A\text{)},$$
$$\mathcal{U}(A) = \{x \in X \mid x \geq y \text{ platí pro každé } y \in A\} \text{ (\textit{horní kužel} množiny } A\text{)}.$$

- Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina a $A \subseteq X$.

  Má-li $\mathcal{L}(A)$ největší prvek, nazývá se *infimum* množiny A; značíme ho $inf(A)$.

  Má-li $\mathcal{U}(A)$ nejmenší prvek, nazývá se *supremum* množiny A; značíme ho $sup(A)$.

- Libovolné uspořádání $\langle A, \leq \rangle$ nazveme *svazem*, právě když pro každé dva prvky $a, b \in A$ existuje $\sup(\{a, b\})$ a $\inf(\{a, b\})$ v A.

- Svaz nazveme *úplný*, právě když pro každou podmnožinu $B \subseteq A$ existuje $sup(B)$ a $inf(B)$ v A.

5.1 Ekvivalence a rozklady

1. Nechť je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a na ní jsou definovány následující relace R_1, R_2, R_3, R_4. Rozhodněte, zda se jedná o relace ekvivalence:

   - $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

     Nápověda: Stačí ověřit, zda je relace reflexní, symetrická a tranzitivní.
   - $R_2 = \{\langle 4, 4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$
   - $R_3 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$
   - $R_4 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$
   - $R_5 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

2. Na množině $\mathbb{Z}$ je definovaná relace R následovně:

   $$m \; R \; n \text{ právě tehdy, když } m - n \text{ je sudé, pro } m, n \in \mathbb{Z}.$$

   Rozhodněte, zda je relace R relací ekvivalence.

   Řešení: Jelikož pracujeme na množině celých čísel, platí že $\langle m, n\rangle \in R$ právě když m a n jsou současně obě sudá nebo obě lichá (ověřte!). Relace je *reflexivní*, protože rozdíl dvou stejných čísel je vždy roven 0. Je rovněž *symetrická*, protože rozdíl dvou sudých (nebo lichých) čísel je vždy sudé číslo nezávisle na tom, v jakém pořadí je odčítáme. Relace je i *tranzitivní*, protože existují jen 2 možnosti, jak dané čísla složit:

   Dle definice tranzitivity víme, že pokud $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$, pak musí platit, že $\langle x, z\rangle \in R$. Je tedy zřejmé, že buď budou čísla x, y, z všechna sudá, nebo všechna lichá (zdůvodněte). Tranzitivita následně plyne triviálně.

3. Zjištěte, které z následujících binárních relací jsou relacemi ekvivalence:

   (a) relace dělitelnosti na $\mathbb{N}$;

   (b) relace kongruence podle přirozeného modulu n na $\mathbb{Z}$ $(x, y \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, x \equiv y \iff \exists z \in \mathbb{Z}; y - x = nz)$;

   (c) relace kolmosti přímek v rovině;

   (d) relace rovnoběžnosti přímek v rovině;

   (e) relace množinové inkluze na potenční množině 2^X množiny X

4. Pro následující systémy množin na $X = \{a, b, c, d\}$ rozhodněte, zda se jedná o rozklady:

   - $\Pi = \{\{a, b, c, d\}\}$;

     Řešení: Je rozkladem.
   - $\Pi = \{\{a, c\}, \{b\}\}$;

     Řešení: Není rozkladem, protože není splněna podmínka (3) z definice rozkladu.
   - $\Pi = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$;
   - $\Pi = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$;
   - $\Pi = \{\{a, c\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$;

     Řešení: Není rozkladem, protože není splněna podmínka (2) z definice rozkladu.

- $\Pi = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \emptyset\}$

  Řešení: Není rozkladem, protože není splněna podmínka (1) z definice rozkladu.

5. Doplňte relace definované na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$ minimálním počtem uspořádaných dvojic tak, aby výsledná relace byla relací ekvivalence. Poté najděte jejich příslušné rozklady.

   (a) $S_1 = \{\langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle \langle 2, 2\rangle\}$

   (b) $S_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

   Řešení:

   $E = S_2 \cup \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

   Nyní najdeme *třídy ekvivalence* jednotlivých prvků:

   - $[1]_E = \{1, 2, 3\}$
   - $[2]_E = [3]_E = [1]_E$
   - $[4]_E = \{4\}$

   Výsledný rozklad: $\Pi_E = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$.

   Zkuste najít ekvivalenci E_{Π_E} příslušnou k rozkladu Π_E.

   Platí $E_{\Pi_E} = E$?

6. Pro následující rozklad Π na množině $X = \{a, b, c, d\}$ najděte příslušnou relaci ekvivalence:

$$\Pi = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}.$$

5.2 Uspořádání

1. Pro následující relace rozhodněte, zda se jedná o uspořádání. Pokud ano, rozhodněte, zda je uspořádání lineární:

   (a) $R_1 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$;

   (b) $R_2 = \langle \mathbb{N}, | \rangle$;

   (c) $R_3 = \langle 2^X, \subseteq \rangle$ pro $X = \{a, b, c\}$;

   (d) $R_4 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, kde $\leq$ je relace definovaná jako "být násobkem".

2. Pro uspořádání z předchozího příkladu nakreslete Hasseovy diagramy. Jak obecně vypadá Hasseův diagram lineárního uspořádání?

3. Nechť $B \subseteq \mathbb{N}$ obsahuje všechna čísla, která dělí číslo 40 beze zbytku. Na B je definována relace R jako uspořádání dle dělitelnosti, tj. $\langle a, b \rangle \in R$ právě když $a|b$. Nakreslete Hasseův diagram pro uvedenou relaci R.

4. Nakrselete Hasseův diagram pro relaci dělitelnosti na množině A, která je dána následovně:

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

   (b) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$;

   (c) $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 30, 60\}$;

   (d) $A = \{2, 4, 6, 12, 24, 36\}$;

   (e) $A = \{1, 2, 3, 5, 11, 13\}$.

5. Je dána relace $\approx$ na $\mathbb{R}^2$ následovně:

$$\langle a, b \rangle \approx \langle c, d \rangle \text{ právě když } |ab| \geq |cd|.$$

   Ověřte, zda $\approx$ je relací uspořádání.

6. Dokažte, že pokud relace R je uspořádáním, pak i relace R^{-1} je uspořádáním.

7. Uvažujme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, |)$. Rozhodněte, zda

   (a) každá podmnožina $\mathbb{N}$ má supremum,

   (b) každá konečná podmnožina $\mathbb{N}$ má supremum,

   (c) každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}$ má infimum.

8. Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ mějme dánu relaci uspořádání následovně:

$$R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 1, 12 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 12 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 3, 12 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 12 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 6, 12 \rangle, \langle 12, 12 \rangle\}.$$

   Výčtem prvků najděte odpovídající relaci pokrytí a nakreslete Hasseův diagram.

9. Na množině $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mějme dánu relaci uspořádání:

$$R_{\leq} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 7 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 7 \rangle\}$$

   Výčtem prvků určete odpovídající relaci pokrytí $R_{\prec}$.

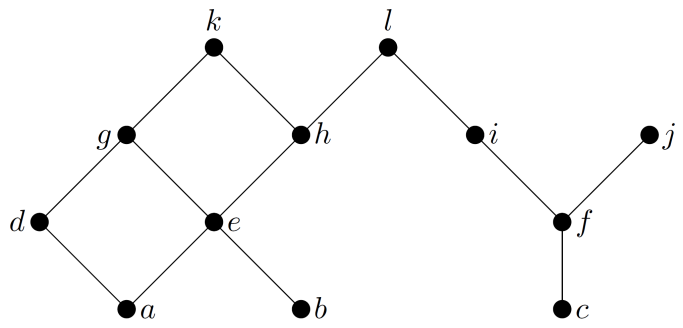
10. Existuje pokrytí na množině $\mathbb{R}$ vzhledem k přirozenému uspořádání $\leq$?

11. K následujícím relacím R_i, které jsou uspořádáním na $X = \{x \mid \langle x, x\rangle \in R_i\}$ nakreslete odpovídající Hasseovy diagramy:

    (a) $R_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$;
    (b) $R_2 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$;
    (c) $R_3 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$;
    (d) $R_4 = \{\langle b, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, b\rangle, \langle e, a\rangle, \langle e, b\rangle, \langle e, c\rangle, \langle e, d\rangle\} \cup Id_{\{a,b,c,d,e\}}$;

    Dále určete, které prvky jsou maximální (minimální), respektive největší (nejmenší). Určte všechny nesrovnatelné prvky.

12. Pro Hasseův diagram znázorněný na následujícím obrázku vyřešte úkoly (a) - (d):



    (a) Určete dolní kužely množin $\{g, h, e\}$, $\{g, i\}$, $\{k, j\}$ a $\{l, j\}$.
    (b) Určete horní kužely množin $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{g, i\}$ a $\{d, e\}$.
    (c) Určete infima množin $\{d, l\}$, $\{e, g\}$, $\{g, h\}$ a $\{i, h\}$.
    (d) Určete suprema množin $\{i, j\}$, $\{e, g\}$, $\{f, g\}$ a $\{i, h\}$.

13. Nechť $\leq$ je běžné neostré uspořádání množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$.
    Definujme relace $\prec_1$ a $\prec_2$ na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ předpisem:

    - $\langle s, t\rangle \prec_1 \langle u, v\rangle$, pokud $s \leq u$ a $t \leq v$,
    - $\langle s, t\rangle \prec_2 \langle u, v\rangle$, pokud $s < u$, nebo $s = u$ a zároveň $t \leq v$.

    Dokažte, že $\prec_1$ a $\prec_2$ jsou uspořádání a že $\prec_2$ je lineární uspořádání.
    Nápověda: Poznamenejme, že $\prec_2$ je známé lexikografické uspořádání (běžné ve slovnících).

14. Které z těchto relací na množině $\mathbb{N}^2$ jsou uspořádání? Které z těchto uspořádání jsou lineární?

    (a) $\leq_1$: $\langle a, b\rangle \leq_1 \langle c, d\rangle$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \leq d$;
    (b) $\leq_2$: $\langle a, b\rangle \leq_2 \langle c, d\rangle$ právě když $a \leq c$ nebo $b \leq d$;
    (c) $\leq_3$: $\langle a, b\rangle \leq_3 \langle c, d\rangle$ právě když $a < c$ nebo ($a = c$ a zároveň $b \leq d$);
    (d) $\leq_4$: $\langle a, b\rangle \leq_4 \langle c, d\rangle$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \geq d$.

15. Mějme relaci R na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takovou, že $\langle a, b\rangle\, R\, \langle c, d\rangle$ právě když $min(a, b) \leq min(c, d)$. Rozhodněte, zda R je uspořádání a jestli existuje minimální, nejmenjší, maximální a největší prvek. Dále rozhodněte, zda pro každou dvouprvkovou podmnožinu existuje supremum či infimum.

16. Zjistěte, zda existuje, a pokud ano, jaký nejmenší počet prvků musí mít uspořádaná množina M s danými vlastnostmi (pro každý bod zvlášť).
Pokud existuje, uveďte příklad, pokud ne, dokažte:

    (a) M obsahuje dva maximální a dva minimální prvky.
    (b) M obsahuje suprema všech svých podmnožin, ale existuje podmnožina, která nemá infimum.
    (c) M obsahuje dva největší prvky.
    (d) M obsahuje jeden minimální, ale žádný nejmenší prvek.

17. Nalezněte všechny šestiprvkové (neizomorfní) úplné svazy.

18. Nechť pro $\langle A, \leq \rangle$ platí, že každá podmnožina A má supremum. Dokažte, že každá podmnožina A má také infimum.

19. Označme $Eq(X)$ množinu všech ekvivalencí na množině X uspořádanou množinovou inkluzí.

    (a) Nakreslete Hasseův diagram pro $Eq(\{1, 2, 3\})$.
    (b) Dokažte, že $Eq(X)$ je svaz.

20. Najděte supremum, infimum, maximální (největší) a minimální (nejmenší) prvky množiny M:

    (a) $M = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$ na uspořádání $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.
    (b) $M = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.
    (c) $M = \mathbb{R}$, pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.
    (d) $M = \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, pro $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$.
    (e) $M = \{-1\} \cup (0, 5)$, pro $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

21. Rozhodněte, jaké prvky obecně odpovídají supremu a infimu libovolné podmnožiny následujících svazově uspořádaných množin:

    (a) $\langle 2^X, \subseteq \rangle$.
    Řešení: Infimum prvků A, B odpovídá jejich průniku $A \cap B$.
    $\sup(\{A, B\}) = A \cup B$.
    (b) $\langle \mathbb{N}, | \rangle$.
    (c) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.

22. Dokažte, že v konečném svazu vždy existuje největší a nejmenší prvek. Je každý konečný svaz úplným svazem?

23. Mějme svaz $(X, \prec)$. Obrdžíme opět svaz, přidáme-li k $(X, \prec)$ nový největší prvek $1'$ a nejmenší prvek $0'$?

24. Pro následující uspořádání rozhodněte, zda se jedná svaz. Pokud ano, rozhodněte, zda je svaz úplný.

    (a) $\langle 2^X, \subseteq \rangle$.
    (b) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.
    (c) $\langle \mathbb{N}, | \rangle$.

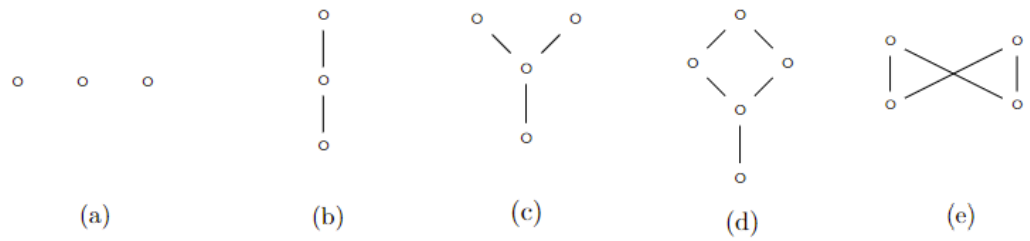
5.3 Svazy

Teorie:

- Uspořádaná množina $\langle X, \leq \rangle$ se nazývá:
  - **svaz**, pokud pro každou dvouprvkovou $A \subseteq X$ existuje *sup(A)* a *inf(A)*
  - **úplný svaz**, pokud pro každou $A \subseteq X$ existuje *sup(A)* a *inf(A)*
- Pokud $\langle X, \leq \rangle$ je svazem, pak X je **svazově uspořádaná** množina a *inf* a *sup* dvouprvkových množin značíme:
  - $x \wedge y = \inf(\{x, y\})$
  - $x \vee y = \sup(\{x, y\})$

Příklady:

1. Pro následující Hasseovy diagramy rozhodněte, zda se jedná o svazy:



   Je svazem uspořádání na jednoprvkové množině?

2. Ověřte, zda platí následující tvrzení:
   (a) Každá uspořádaná množina má alespoň 1 maximální prvek. (NE)
   (b) Každá konečná uspořádaná množina je svazem. (NE)
   (c) Ve svazu existuje vždy nejmenší a největší prvek. (NE)
   (d) Každá konečná lineárně uspořádaná množina je úplným svazem. (ANO)
   (e) Každá konečná uspořádaná množina má nejmenší prvek, právě když na ní existuje právě jeden minimální prvek. (ANO - dokažte!)
   (f) Každý konečný svaz je úplným svazem. (ANO)
   (g) Existuje nekonečná uspořádaná množina, která je úplným svazem. (ANO)
   (h) Každý konečný svaz má vždy největší a nejmenší prvek. (ANO)
   (i) Nechť X je svazově uspořádaná množina. Pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$ platí: $\inf(A) \leq \sup(A)$. (NE)

3. Které z následujících svazů jsou úplnými svazy?

   (a) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ (NE)

   (b) $\langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq \rangle$ (ANO)

   (c) $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ (NE)

   (d) $\langle \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}, \leq \rangle$ (ANO)

   (e) $\langle \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 100\}, \leq \rangle$ (ANO)

   (f) $\langle \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 100\}, \leq \rangle$ (NE)

   (g) $\langle 2^X, \subseteq \rangle$ pro libovolnou konečnou množinu $X \neq \emptyset$ (ANO - čemu je rovno infimum a supremum?)

6 Teorie grafů

Teorie:

- **Neorientovaný graf** je dvojice $G = \langle V, E \rangle$, kde V je neprázdná množina tzv. *vrcholů* (někdy také uzlů) a $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ je množina dvouprvkových množin vrcholů, tzv. *neorientovaných hran.*
- **Orientovaný graf** je dvojice $G = \langle V, E \rangle$, kde V je neprázdná množina *vrcholů*(uzlů) a $E \subseteq V \times V$ je množina uspořádaných dvojic vrcholů, tzv. *orientovaných hran.*
- **Sled** v grafu $G = \langle V, E \rangle$ je posloupnost

$$v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n,$$

  kde $v_i \in V$ jsou vrcholy a $e_j \in E$ jsou hrany a platí, že
  - $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ pro $i = 1, ..., n$, je-li G neorientovaný,
  - $e_i = \langle v_{i-1}, v_i \rangle$ pro $i = 1, ..., n$, je-li G orientovaný.
- Číslo **n** nazveme *délka sledu.*
- Sled nazveme
  - **uzavřený**, právě když $v_0 = v_n$,
  - **tah**, právě když se žádná hrana neopakuje,
  - **cesta**, právě když se neopakuje žádný vrchol,
  - **kružnice**, právě když je uzavřeným tahem a kromě vrcholů v_0 a v_n jsou každé 2 vrcholy různé.
- Vzdálenost z vrcholu u do v nazveme **délkou cesty** z u do v, právě když je nejkratší možnou cestou z u do v.
- Graf nazveme **souvislým**, právě když existuje sled z každého vrcholu u do každého vrcholu v.
- **Hranové ohodnocení** grafu $\langle V, E \rangle$ množinou hodnot D je funkce $w : E \to D$.
- **Vrcholové ohodnocení** grafu $\langle V, E \rangle$ množinou hodnot D je funkce $w : V \to D$.
- **Kostra** neorientovaného grafu G je jeho podgraf G', který je stromem (neobsahuje kružnice) a obsahuje všechny vrcholy grafu G.
- **Minimální kostra** grafu G je kostra, která má ze všech koster $G' = \langle V', E' \rangle$ nejmenší hodnotu $w(G')$, kde

$$w(G') = \sum_{\{u,v\} \in E'} w(\{u, v\})$$

- **Kruskalův algoritmus** na hledání **minimální kostry**:

Vstup: souvislý neorientovanýgraf $G = \langle V, E \rangle$ s n vrcholy a m hranami, ohodnocení $w : E \to \mathbb{R}^+$

Výstup: množina hran $E' \subseteq E$ taková, že $G' = \langle V, E' \rangle$ je minimální kostra grafu G

1. setřiď hrany vzestupně podle ohodnocení, tj. utvoř posloupnost $e_1, \ldots, e_m$ všech hran z E tak, že
$$w(e_1) \leq \cdots \leq w(e_m);$$
2. $E_0 = \emptyset$; $i := 0$;
3. dokud E_i neobsahuje $n - 1$ hran, prováděj:
$i := i + 1$;
$$E_i := \begin{cases} E_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{pokud } \langle V, E_{i-1} \cup \{e_i\} \rangle \\ & \text{neobsahuje kružnici,} \\ E_{i-1} & \text{v opačném případě;} \end{cases}$$
4. $E' := E_i$.

- **Dijkstrův algoritmus** na hledání nejkratších cest v grafu

Problém:

- vstup: neorientovaný graf $G = \langle V, E \rangle$, jeho hranové ohodnocení $w : E \to \mathbb{R}^+$ (každé hraně je přiřazena její délka), a vrchol $s \in V$.
- výstup: pro každý vrchol $v \in V$ číslo $d(v)$, které je vzdáleností z s do v.

Dijsktrův algoritmus

Vstup: graf $G = \langle V, E \rangle$, vrchol $s \in V$, hranové ohodnocení $w : E \to \mathbb{R}^+$,

Výstup: hodnota $d(v)$ pro každý $v \in V$, $d(v)$ je délka nejkratší cesty z s do v

Proměnné: funkce $d : V \to \mathbb{R}^+$, číslo $m \in \mathbb{R}^+$, množiny $A, N \subseteq V$

1. $d(s) := 0$; pro každý $v \in V - \{s\}$: $d(v) := \infty$; $A := V$;
2. pokud neexistuje $v \in A$ takový, že $d(v) \neq \infty$, skonči;
3. $m := \min\{d(v) \mid v \in A\}$; $N := \{v \in A \mid d(v) = m\}$; $A := A - N$;
4. pro všechny $v \in N$, $u \in A$ takové, že $\{v, u\} \in E$: jestliže $d(v) + e(\{v, u\}) < d(u)$, pak $d(u) := d(v) + e(\{v, u\})$; pokračuj krokem 2.

Příklady:

1. Rozhodněte, které z následujících posloupností vrcholů a hran (grafu níže) jsou sledy. U všech sledů pak dále určete, zda se jedná o kružnice, tahy či cesty.

   (a) $v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_8, v_5, e_5, v_1$;

   (b) v_3, e_3, v_5, e_1, v_6;

   (c) v_5, e_8, v_4;

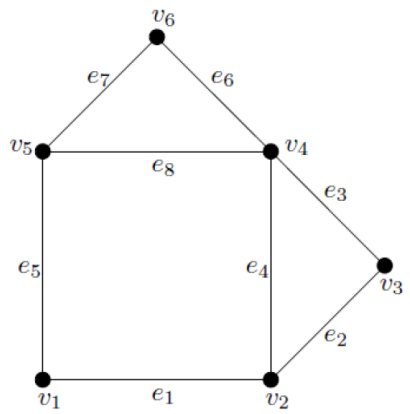
   (d) $v_2, e_4, v_4, e_4, v_2, e_4, v_4, e_4, v_2$;

   (e) v_6, v_4, e_1;

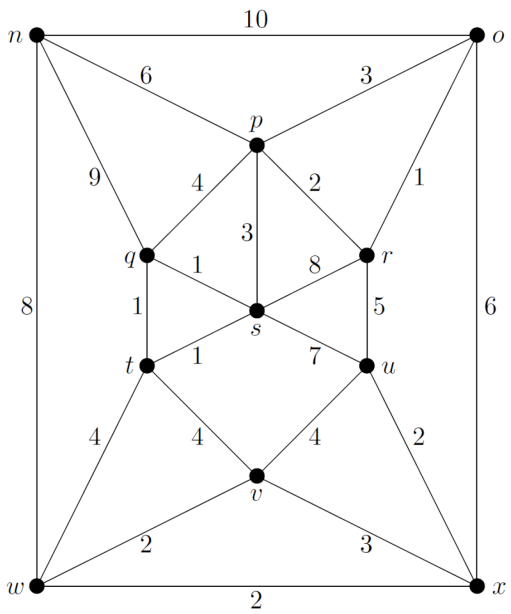
   (f) $v_5, e_5, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_6, v_6, e_7, v_5, e_8, v_4, e_4, v_2$;

   (g) v_3, e_4, e_3;

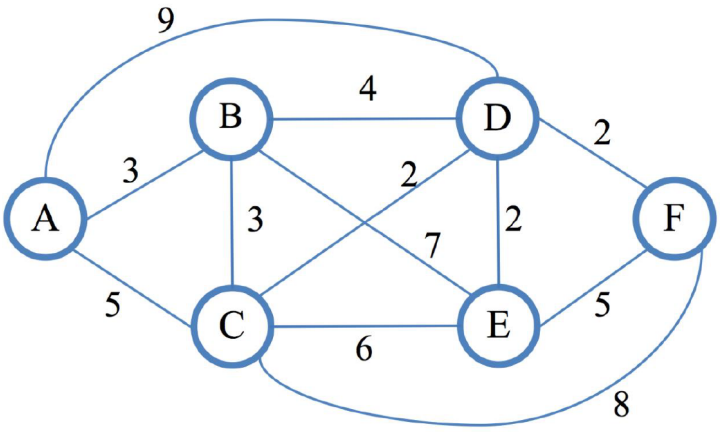
   (h) $v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2$.



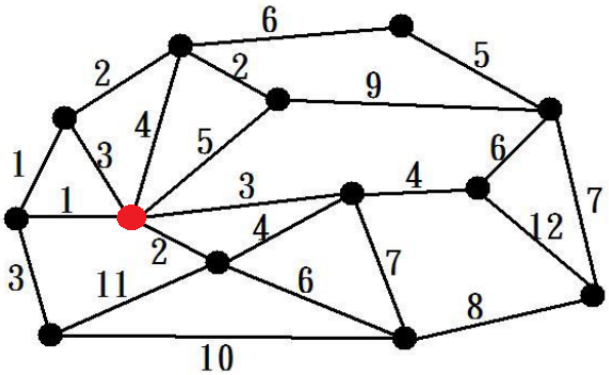
2. Nalezněte minimální kostru a nejkratší cestu v grafu ke všem uzlům z uzlu $\boldsymbol{S}$.



3. Na následujícím grafu nalezněte minimální kostru a nejkratší cestu ke všem uzlům z uzlu C.



4. Na následujícím grafu nalezněte minimální kostru a nejkratší cestu ke všem uzlům ze zvýrazněného uzlu.



7 Kombinatorika a pravděpodobnost

7.1 Teorie

Cílem lekce není naučení se vzorečků, ale porozumění kombinatorickým úvahám!

- **Pravidlo součtu** - Lze-li úkol A provést m způsoby a úkol B lze provést n způsoby, přičemž žádný z m způsobů provedení A není totožný s žádným ze způsobů provedení B, pak lze provést úkol A **nebo** B právě $m + n$ způsoby.

  Příklad: Deset žáků ve třídě jezdí do školy autobusem a 20 jich chodí pěšky, přičemž žádný žák neuvedl obě možnosti najednou. Kolika způsoby lze vybrat žáka, který jezdí autobusem nebo chodí pěšky?

  Odpověď: 10+20

  Doplňující otázka: Co kdyby 4 žáci uvedli, že jezdí autobusem i chodí pěšky? (26)

- **Pravidlo součinu** - Lze-li úkol C rozložit na po sobě jdoucí úlohy A a B (tj. provést C znamená provést nejdříve A a poté B) a lze-li A provést m způsoby a B lze provést n způsoby, pak lze úkol **C** provést $m * n$ způsoby.

  Příklad: Kolik prvků má kartézský součin množin A a B?

  Odpověď: $|A| \cdot |B|$

- **Permutace** n různých objektů je libovolné seřazení těchto objektů.
  - Počet permutací n značíme *P(n)*.
  - $P(n) = n!$ - důkaz součástí cvičení.

    Příklad: Kolika způsoby lze uspořádat číslice 123456789?

- **Permutace s opakováním** je stručně libovolná uspořádaná k-tice z n prvků, ve které se každý z n prvků vyskytuje alespoň jednou.
  - Mějme tedy dáno n různých prvků $\{p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_n\}$ a pro každý prvek p_i si určeme počet výskytů tohoto prvku - $c(p_i) \in \mathbb{N}$.
  - Permutace s opakováním je libovolné uspořádí těchto prvků, ve kterém se každý prvek p_i vyskytuje právě $c(p_i)$-krát
  - Počet takových uspořádání je dán hodnotou $P'(n) = \frac{P(n)}{c(p_1)! \cdot c(p_2)! \cdot \ldots \cdot c(p_n)!}$
  - Příklad: Kolika způsoby lze uspořádat písmena ve slově *jednoplošník*? ($\frac{12!}{2! \cdot 2!}$)

- **Variace** - Je dáno n různých objektů a číslo $k \leq n$. Variace k objektů z n je libovolný výběr k objektů z n.
  - Počet variací značíme $V(n, k)$.
  - $V(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ - důkaz součástí cvičení.

    Příklad: Kolik existuje různých pěticiferných čísel sestavených z číslic $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ za předpokladu, že se číslice nemohou opakovat?

- **Variace s opakováním** - značíme $V'(n, k)$

  $V'(n, k) = n^k$ - důkaz součástí cvičení.

- **Kombinace** k (objektů) z n (objektů) je libovolný výběr k objektů z daných n objektů, ve kterém nezáleží na pořadí vybíraných objektů.
  - Počet kombinací značíme $\binom{n}{r}$.
  - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$ - důkaz součástí cvičení.
  - Dokažte, že platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- **Kombinace s opakováním** - $\binom{n}{k}'$

  $\binom{n}{k}' = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ - důkaz přeskočíme.

  Příklad: Kolika způsoby lze rozdělit 20 vstupenek mezi 10 lidí?

7.2 Příklady

1. Na turnaj přijely 4 týmy. Kolik se bude hrát zápasů, jestliže každý tým bude hrát s každým dalším právě jeden zápas?

   Řešení: Vybíráme dvojici ze 4 týmů - nesmí se opakovat a nezáleží na pořadí - kombinace bez opakování $\binom{4}{2}$.

2. Kolik různých šesticiferných čísel lze sestavit z číslic 1,2,3?

   Řešení: Určitě záleží na pořadí a číslice se mohou opakovat - variace s opakováním $V'(3,6)$

3. Nechť je dáno n výrokových symbolů. Kolika způsoby je můžeme ohodnotit 0 nebo 1?

   Řešení: 2^n - variace s opakováním

4. V cukrárně si lze objednat z deseti druhů zákusků, přičemž od každého druhu má cukrárna alespoň 20 kusů. Kolika způsoby lze koupit

   (a) 4 zákusky,

   Řešení: $\binom{10}{4}'$ - kombinace s opakováním

   (b) 4 různé zákusky?

   Řešení: $\binom{10}{4}$ - kombinace bez opakování

5. Kolik existuje různých kvádrů takových, že délka každé hrany (v cm) je přirozené číslo z množiny $M = \{5, 2, 6, 9, 15, 56\}$.

   Řešení: Vybíráme 3 ze 6 takovou, že se hodnoty mohou opakovat a nezáleží na pořadí (zdůvodněte) - kombinace s opakováním

6. Kolika způsoby je možno na šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby

   (a) měla stejnou barvu?

   Řešení: Vybíráme trojici z 32 a na pořadí nám nezáleží - kombinace bez opakování.

   (b) neležela všechna v jednom sloupci?

   Řešení: $\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3}$

7. Máme k dispozici množinu číslic $A = \{0, 3, 4, 5, 6, 9\}$. Kolik různých čtyřciferných čísel dělitelných pěti z nich lze vytvořit,

   (a) mohou-li se cifry opakovat?

   Řešení: 360

   (b) nemohou-li se cifry opakovat?

   Řešení: 108

8. Kolika různými způsoby lze zamíchat 32 karet?

9. Ve třídě je celkem 30 dětí a mezi nimi je jedna dívka jménem Ema a jeden kluk jménem Filip. Kolika způsoby lze z této třídy vybrat 7 dětí tak, aby mezi vybranými

   (a) byla Ema?

   Řešení: $\binom{29}{6}$

   (b) nebyl Filip?

Řešení: $\binom{29}{7}$

(c) byla Ema i Filip?

(d) nebyla Ema ani Filip?

10. Kolik různých přímek určuje 10 bodů v rovině, pokud

    (a) žádné tři body neleží na jedné přímce?

    Řešení: Za daných předpokladů musí každé 2 body určovat jinou přímku. Z toho plyne, že vybíráme 2 body z 10 takové, že nezáleží na pořadí - $\binom{10}{2}$.

    (b) právě šest bodů leží na jedné (stejné) přímce?

11. Kolik existuje čísel větších než 700 a menších než 40 000, v jejichž zápise se vyskytují pouze cifry $2, 3, 4, 7, 8$ a to každá nejvýše jednou?

12. Máme krabičku pro šest pastelek a v ní žlutou, oranžovou, červenou, modrou, zelenou a šedou. Kolika způsoby lze pastelky

    (a) dát do krabičky?

    (b) dát do krabičky tak, aby modrá a zelená byly vedle sebe?

    (c) dát do krabičky tak, aby oranžová byla na kraji?

    (d) dát do krabičky tak, aby žlutá a červená byly vedle sebe a šedá byla na kraji?

13. Zkoušející má připravených 20 příkladů z aritmetiky a 30 z geometrie. Kolik má možností sestavení různých zadání, pokud chce do písemky dát

    (a) 3 aritmetické a 2 geometrické příklady?

    (b) 1 aritmetický a 2 geometrické příklady?

14. Na pomaturitním setkání po letech si účastníci cinkli sklenicemi. Uskutečnilo se 253 cinknutí. Kolik účastníků bylo na setkání?

15. Je výhodnější si vsadit na to, že na třech kostkách padne součet 11 nebo 12? (11)

16. Jaká je pravděpodobnost, že polopřímka vedená z bodu A má s kružnicí $k(S; 3cm)$ alespoň jeden společný bod, je-li:

    (a) $|AS| = 6cm$? (1/6)

    (b) $|AS| = 3cm$? (1)

17. V osudí je 7 červených koulí a 10 modrých koulí. Namátkou vybereme 4 koule. Jaká je pravděpodobnost, že

    (a) vybrané koule budou stejné barvy? (0.15)

    (b) mezi nimi budou alespoň 3 červené koule? (0.21)

18. Házíme červenou kostkou a pak dvěma modrými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že na červené kostce padne menší číslo, než na obou modrých kostkách? (0.26)

19. Z karetní hry o 32 kartách vytáhneme postupně 2 karty.

    (a) Jaká je pravděpodobnost, že druhá karta bude král? (0.125)

    (b) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli 2 krále? (0.012)

20. Ve Sportce hráč tipuje 6 čísel ze 49. Sázející získává 1. výhru, pokud správně uhodne všech 6 losovaných čísel; 2. výhru, pokud uhodne 5 čísel; 3. výhru, pokud uhodne 4 čísla a 4. výhru, pokud uhodne 3 čísla. Jaká je pravděpodobnost, že sázející
    (a) získá 1. výhru? (0.0000000715)
    (b) získá 4. výhru? (0.0177)
    (c) uhodne alespoň jedno číslo? (0.564)

21. Studenti jsou rozděleni do tří stejně početných skupin. Jistého testu se zúčastnilo 40 % studentů z první skupiny, 30 % studentů ze druhé skupiny a 30 % studentů ze třetí skupiny. Víme, že studenti z první skupiny mívají na testech úspěšnost 60 %, studenti ze druhé skupiny mívají úspěšnost 35 % a ze třetí skupiny 70 %. Učitel si náhodně vybere jeden test a začne jej opravovat.
    (a) Jaká je pravděpodobnost, že opravuje úspěšný test? (0.555)
    (b) Jaká je pravděpodobnost, že test psal student z první skupiny, pokud je test úspěšný? (0.43)

22. Ve třídě je 40 žáků, z toho 12 chlapců a 28 dívek. Náhodně vybereme 6 žáků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými
    (a) budou jenom dívky?
    (b) budou jenom chlapci?
    (c) bude alespoň jeden chlapec?
    (d) nebude více než 5 dívek?

23. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šesti kostkami najednou padne
    (a) na každé koste jiné číslo?
    (b) na všech kostkách stejné číslo?
    (c) na všech kostkách šestka?
    (d) na všech kostkách sudé číslo?
    (e) na všech kostkách číslo větší než 4?

24. Ze 3 chlapců a 4 dívek se losují dva hráči do hry. První vylosovaný bude kapitán, druhý kormidelník. Jaká je pravděpodobnost, že kormidelníkem bude dívka? (0.56)

25. Vybereme náhodně čtyřmístné přirozené číslo. Jaká je pravděpodobnost, že se v zápisu tohoto čísla vyskytuje cifra 7
    (a) právě jednou? ($P = \frac{V(9,3)+3\cdot(8\cdot(V(9,2)))}{9\cdot 10^3}$)
    (b) alespoň jednou?
    (c) na třetím místě?

26. V bedně je 49 výrobků, z nichž je pouze 6 bez vady. Náhodně vytáhneme 6 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že z vytažených výrobků jsou alespoň čtyři bez vady?

27. Ve skladu je 800 součástek, z toho je 20 vadných. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 9-ti náhodně vybranými součástkami nebudou více než 3 vadné?

28. Určete, kolik nejméně lidí je třeba uvažovat, aby pravděpodobnost, že alespoň dva z nich budou narozeni ve stejný den byla ≥ 0.5.

Řešení: Pro správnou úvahu je nutné si uvědomit, jaká je pravděpodobnost, že mezi n náhodně vybranými lidmi budou mít alespoň dva lidé narozeniny ve stejný den? To lze spočítat jako doplňkovou pravděpodobnost jevu, že žádní dva lidí se nenarodí ve stejný den.

$$P = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - n + 1}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)!}$$

Nyní lze jednoduše do rovnice dosazovat za $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ dokud výsledná pravděpodobnost nebude větší nebo rovna 0.5

$$n = 5: \quad P = 0.027$$

$$n = 10: \quad P = 0.117$$

$$n = 15: \quad P = 0.2529$$

$$n = 20: \quad P = 0.411$$

$$n = 21: \quad P = 0.444$$

$$n = 22: \quad P = 0.4756$$

$$n = 23: \quad P = 0.507$$

$$n = 25: \quad P = 0.569$$

$$n = 30: \quad P = 0.706$$

$$n = 50: \quad P = 0.97$$

$$n = 69: \quad P = 0.999$$

Výsledkem je tedy $n = 23$, ale proč?
Pouhá intuice může člověka vést ke (špatné) následující interpretaci příkladu:
Kolik nejméně lidí je potřeba uvažovat, aby pro náhodně vybranou osobu *X* existovala osoba *Y*, která se narodila ve stejný den?
Nicméně, takhle zadaná otázka je úplně jiná než ta původní, jelikož v této otázce se zabýváme pouze případy, které porovnávají dny narození n lidí s jedním konkrétním (X) dnem. V původním příkladu se ale ve skupině lidí porovnávají všechny možné (nejen) dvojice dnů narození, a tedy zkoumáme minimálně $\binom{23}{2} = 253$ možností (více než 365/2).